Pregunta de conocimiento: ¿Qué se quiere decir cuando se afirma que las matemáticas son un sistema axiomático?

Retrato idealizado de Euclides (por Antonio Cifrondi).

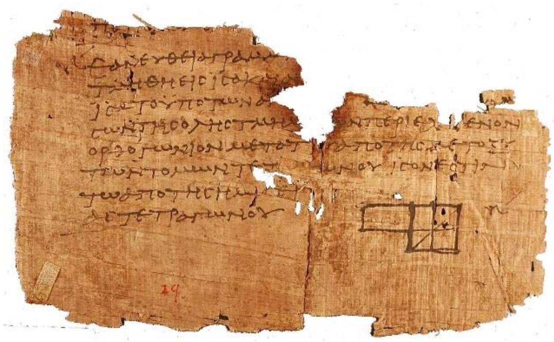
El modelo matemático

Una definición habitual de las matemáticas es la de "**ciencia exacta**". Esta idea viene de los griegos. El matemático griego más famoso fue Euclides, que vivió en Alejandría (325-265 años a. J.C). Fue el primero en organizar la geometría como conocimiento riguroso, y sus ideas han tenido una permanente influencia en la civilización. La geometría que se estudia hoy en día en el bachillerato es básicamente euclidiana.

El modelo de razonamiento desarrollado por Euclides se define como **un sistema formal**, y se compone de tres elementos:

- axiomas
- razonamiento deductivo
- teoremas

Cuando se razona formalmente, se empieza por los axiomas, se hacen razonamientos deductivos, y se extraen teoremas. Estos últimos dan la base para seguir razonando y derivar teoremas más complejos. **Se llama sistema formal a una forma de razonar basada en una estructura lógica y simbólica, en la que se puede razonar independientemente de la experiencia empírica que nos aportan los sentidos.**



Fragmento de los *Elementos* de Euclides (papiro hallado en Egipto).

Los axiomas

Los axiomas de un sistema son sus puntos de partida o supuestos básicos. **Se considera que son los cimientos que dan una base sólida al edificio, porque son las premisas de las que se parte**. Hasta el siglo XIX al menos, se consideraban verdades evidentes los axiomas matemáticos, ya que eran la base del conocimiento matemático. A partir de éstos, y por **razonamiento deductivo**, se extraen **consecuencias** que forman el conjunto de las matemáticas.

Se considera que los axiomas son proposiciones tan claras y evidentes que no necesitan demostración. Se podría exigir que se demostrasen todos los axiomas, pero no se puede probar todo. Si lo intentaras, te verías envuelto en una regresión infinita –cadena de razonamientos sin fin- para probar *A* según *B*, y *B* a partir de *C*, y así eternamente. Como tenemos que empezar por algún sitio, no hay mejor punto de partida que lo que parece obvio.

Hay cuatro exigencias tradicionales para los conjuntos de axiomas: deberían ser **coherentes, independientes, simples y productivos.**

1. ***Coherentes*.** Si puedes deducir tanto *p* como *no p* del mismo grupo de axiomas, entonces no son coherentes. La incoherencia es un mal asunto, porque si se la permite en un sistema, se puede probar literalmente cualquier cosa.
2. ***Independientes***. Por pura elegancia, se debería empezar con el menor número posible de axiomas. No deberías poder deducir un axioma de los otros, ya que entonces se trata de un teorema más que de un axioma.
3. ***Simples***. Ya que se aceptan los axiomas sin demasiadas pruebas, deberían ser lo más claros y simples posible.
4. ***Productivos***. Un buen sistema formal debería permitirte probar tantos teoremas como sea posible, usando el menor número de axiomas.

Empezando con unas pocas definiciones –tales como que un punto es indivisible, y que una línea tiene longitud, pero no anchura- Euclides postuló los 5 siguientes axiomas:

1. **Dados dos puntos se puede trazar una recta que los une.**
2. **Cualquier segmento puede prolongarse de manera continua en cualquier sentido.**
3. **Se puede trazar una circunferencia con centro en cualquier punto y de cualquier radio.**
4. **Todos los ángulos rectos son iguales.**
5. **Sólo se puede trazar una paralela a una línea dada por un punto exterior.**

El razonamiento deductivo

Como ejemplo de razonamiento deductivo, es habitual recurrir a un silogismo:

Todo humano es mortal (premisa 1).

Sócrates es humano (premisa 2).

Luego, Sócrates es mortal (conclusión).

La conclusión del argumento, se extrae de las premisas de forma que, si son ciertas, entonces la conclusión es *necesariamente* verdadera. **En matemáticas, los axiomas son como las premisas, y los teoremas son como las conclusiones.**

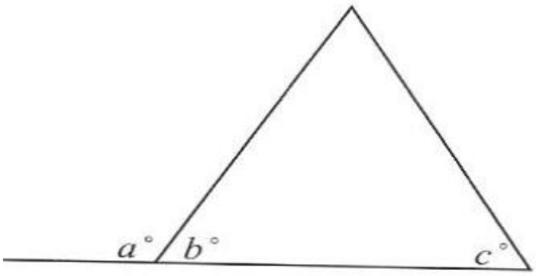
Los teoremas

A partir de los cinco axiomas y del razonamiento deductivo, Euclides dedujo varios teoremas simples, como los siguientes:

1. Las líneas perpendiculares a una misma línea, son paralelas.
2. Dos líneas rectas no cierran un área.
3. La suma de los ángulos de un triángulo suma 180 grados.
4. Los ángulos sobre una línea recta suman 180 grados.

Estos teoremas permiten llegar a consecuencias más complejas. Observa la figura siguiente. Te dicen que el ángulo *a*, más el ángulo *c*, suman 180 grados, y te piden que pruebes que el ángulo *b* es igual que el *c*.

$a + c = 180$



Prueba que $b = c$

He aquí la prueba:

1.		$a + c = 180$	dados
2.	Y	$a + b = 180$	ángulos sobre una línea recta (anterior teorema 4)
3.	Entonces	$a + c = a + b$	por sustitución
4.	Entonces	$b = c$	

Uno de los aspectos atractivos de esta prueba es su universalidad. Cualquiera que sea el tamaño de un ángulo *a* –sean 102 o 172 grados- si sabemos que el ángulo *a* más el ángulo *c* es igual a 180 grados, entonces el ángulo *b* será igual que el *c*.

Conclusión.

¿Entiendes ahora por qué se llama *ciencia exacta* a las matemáticas? ¿Entiendes que se pueda razonar y descubrir conocimientos nuevos por puro razonamiento deductivo? ¿Te parece que los axiomas son lógicos y evidentes por sí mismos? ¿Entiendes qué es un sistema axiomático?